



Άσκηση 3, σ. 75: Αν η f είναι φραγμένη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση: Έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση Dirichlet $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη. Η g όμως είναι φραγμένη ($|g(x)| \leq 1$) άρα η πρόταση είναι λάθος. $\square$

Άσκηση 4, σ. 75: Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση: Θωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Είναι $|f(x)| = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη (τι ισχύει για τα $U(f, P)$ και $L(f, P)$). Όμως για την f θα είναι (με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε για τη συνάρτηση Dirichlet) $\int_0^1 f(x) dx = -1$ και $\int_0^1 f(x) dx = 1$, άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη και η πρόταση είναι λάθος. $\square$

Άσκηση 8, σ. 75: Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Λύση: Οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς. Άρα σε κάθε υποδιάστημα του $[a, b]$ μπορώ να βρω ένα ρητό. Έστω P τυχαία διαμέριση του $[a, b]$ και $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Για κάθε k έχω ότι υπάρχει $q_k \in [x_k, x_{k+1}] \cap \mathbb{Q}$. Άρα αφού $f(q_k) = 0$ θα είναι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} \leq 0 \text{ και } M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} \geq 0.$$

Οι παραπάνω ανισότητες δίνουν $L(f, P) \leq 0$ και $U(f, P) \geq 0$. Αφού η P ήταν τυχαία οι ανισότητες ισχύουν και για τα $\int_a^b f(x) dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$ και $\int_a^b f(x) dx = \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$. Άρα

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq 0.$$

$$\text{Άρα } \int_a^b f(x) dx = 0.$$

$\square$

Άσκηση 12, σ. 75: Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.
2. $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.



Λύση: Επειδή η απόδειξη είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις - και μάλιστα όμοια με την περίπτωση $f(x) = x^2$ (σημειώσεις σ. 59-60) θα κάνουμε μόνο την περίπτωση του $\sin x$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη διαμέριση του $[0, \pi/2]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα (αυτή η διαμέριση λειτουργεί για κάθε μονότονη συνάρτηση). Άρα

$$P_n = \left\{ 0 = x_0 < \frac{\pi}{2n} < \frac{2\pi}{2n} < \frac{3\pi}{2n} < \dots < x_n = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \right\}$$

Αφού η $\sin(x)$ είναι αύξουσα στο $[0, \pi/2]$ θα είναι για κάθε k , $m_k = f(x_k) = \sin(x_k)$ και $M_k = f(x_{k+1}) = \sin(x_{k+1})$. Άρα:

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_0^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) - \sum_0^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_0^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_0^{n-1} \frac{\pi}{2n} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{\pi}{2n} \sum_0^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \\ &= \frac{\pi}{2n} (f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})} + \cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{f(x_{n-2})} \dots + \cancel{f(x_1)} - f(x_0)) \\ &= \frac{\pi}{2n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\pi}{2n} (f(\pi/2) - f(0)) = \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

Αφού $\frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, από το κριτήριο του Riemann (Θεώρ. 4.2.2) έχω ότι η $\sin(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \pi/2]$.

Αν θέλαμε να κάνουμε χρήση της “ε-μορφής” του κριτηρίου (Θεώρ. 4.2.1) θα είχαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ επιλέγω $n > \left\lceil \frac{\pi}{2\epsilon} + 1 \right\rceil > \frac{\pi}{2\epsilon}$. Οπότε $\frac{1}{n} < \frac{2\epsilon}{\pi}$ και

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{\pi}{2n} < \frac{2\pi\epsilon}{2\pi} = \epsilon.$$

□

Παραλειπόμενα 1: Είχαμε αναφέρει (σημειώσεις σ. 62) ότι η συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε άρρητο, ενώ είναι ασυνεχής για κάθε ρητό. Ακολουθεί η απόδειξη του ισχυρισμού.

Λύση: Θέλουμε να δείξουμε ότι η w είναι συνεχής για $x = 0$ και για κάθε $r \in [0, 1]$ με $r \notin \mathbb{Q}$, ενώ δεν είναι συνεχής για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$. Το δεύτερο προκύπτει από τον ακολουθιακό ορισμό της συνέχειας. Είναι $w(q) = q \neq 0$ αλλά υπάρχει ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε

$$1. \ x_n \notin \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$$2. \ x_n \rightarrow q.$$

Άρα έχω ακολουθία $x_n \rightarrow q$ για την οποία $h(x_n) \rightarrow 0 \neq w(q)$. Άρα η h δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.



Αν τώρα έχουμε $r = 0$ ή $r \notin \mathbb{Q}$ (με $r \in [0, 1]$) θα χρησιμοποιήσουμε τον ε - δ ορισμό της συνέχειας. Για κάθε $\varepsilon > 0$ είδαμε στην απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας ότι το σύνολο

$$A = \{q \in [0, 1] : h(q) \geq \varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Άρα αν $0 < \delta < \min\{|q - r| : q \in A\}$ θα έχουμε ότι $[r - \delta, r + \delta] \cap A = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι

$$|r - x| < \delta \Rightarrow |h(r) - h(x)| = |h(x)| < \varepsilon.$$

□

Παραλείπόμενα 2: Είχαμε δείξει ότι η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ολοκληρώσιμη (σημειώσεις σ. 60-61). Θα υπολογίσουμε με χρήση των πάνω και κάτω αθροισμάτων το $\int_0^1 \sqrt{x} dx$.

Λύση: Είδαμε ότι (για την συγκεκριμένη ακολουθία διαμερίσεων που είχαμε επιλέξει)

$$U(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right)$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{2k+1}{n^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k^2 + 3k + 1}{n^3} \\ &= \frac{2}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \\ &= \frac{2n(n-1)(2n-1)}{6n^3} + \frac{3n(n-1)}{2n^3} + \frac{n-1}{n^3} \\ &= \frac{4n^3}{6n^3} - \frac{6n^2}{6n^3} + \frac{2n}{6n^3} + \frac{3n^2}{2n^3} - \frac{3n}{2n^3} + \frac{n}{n^3} - \frac{1}{n^3} \rightarrow \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε βρει ακολουθία διαμερίσεων για την οποία οι αριθμοί $U(f, P_n)$ τείνουν στο $2/3$. Άρα το infimum των άνω αθροισμάτων φράσσεται από πάνω από το $2/3$, δηλαδή

$$\overline{\int_0^1 \sqrt{x} dx} = \inf\{U(\sqrt{x}, P) : P \text{ διαμέριση του } [0, 1]\} \leq \frac{2}{3}$$

Με τον ίδιο τρόπο (λείπουν κάποιοι από τους όρους που έτσι κι αλλιώς τείνουν στο 0) έχουμε

$$\underline{\int_0^1 \sqrt{x} dx} = \sup\{L(\sqrt{x}, P) : P \text{ διαμέριση του } [0, 1]\} \geq \frac{2}{3}$$

Άρα

$$\frac{2}{3} \leq \underline{\int_0^1 \sqrt{x} dx} \leq \int_0^1 \sqrt{x} dx \leq \overline{\int_0^1 \sqrt{x} dx} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{δηλαδή } \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$$

□