



Άσκηση 7, σ. 75: Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sup\{L(f, Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \geq L(f, P) = U(f, P) \\ &\geq \inf\{U(f, Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Και επειδή πάντα ισχύει $\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}$ έχουμε ότι $\underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx}$ και η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατηρήστε ότι $U(f, P) = L(f, P)$ σημαίνει ότι για κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης $[x_{k+1}, x_k]$ πρέπει να ισχύει $m_k = M_k$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο $[x_{k+1}, x_k]$. Όμως κάθε ζευγάρι γειτονικών διαστημάτων $[x_{k-1}, x_k]$ και $[x_k, x_{k+1}]$ έχει το x_k κοινό σημείο. Αυτό σημαίνει πως η f είναι σταθερή σε όλο το $[a, b]$ (πολύ πιο ισχυρό από το ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη). $\square$

Άσκηση 9, σ. 75: Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Λύση: f φραγμένη σημαίνει ότι υπάρχει M τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα για κάθε διαμέριση και για κάθε k για τη διαφορά $M_k - m_k$ θα ισχύει $M_k - m_k \leq |M_k| + |m_k| \leq 2M$. Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγω b τέτοιο ώστε $b < \frac{\epsilon}{4M}$.

Παρατήρηση: το σκεπτικό είναι ότι για την διαμέριση $P = \{0 < b < x_2 < x_3 \cdots < x_n = 1\}$ θα εμφανισώ στην διαφορά $U(f, P) - L(f, P)$ τον όρο $(M_0 - m_0)(b - 0) \leq 2M \cdot b$ και θα θέλω να είναι μικρότερος από $\epsilon/2$. Άρα $2M \cdot b < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow b < \frac{\epsilon}{4M}$.

Αφού στο $[b, 1]$ η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση Q του $[b, 1]$ με

$$U(f, Q) - L(f, Q) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0, 1]$. Θα είναι

$$U(f, P) - L(f, P) = (M_0 - m_0)(b - 0) + U(f, Q) - L(f, Q) < \frac{2M\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ από το κριτήριο του Riemann. $\square$

Άσκηση 11, σ. 75: Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση: Παρατηρήστε ότι το “προβληματικό” σημείο της g είναι το σημείο ασυνέχειας. Όπως και στη άσκηση 9, αν το υποδιάστημα που το περιέχει είναι πολύ μικρό δεν θα παίζει σημαντικό ρόλο στη διαφορά $U(g, P) - L(g, P)$. Έστω $\epsilon > 0$. Καταρχάς παίρνω¹ $\delta < \frac{\epsilon}{12M}$ όπου M ένα άνω φράγμα της $|g|$. Στο διάστημα $[a, x_0 - \delta]$ η g είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη και άρα από κριτήριο Riemann υπάρχει P_1 διαμέριση του $[a, x_0 - \delta]$ με (εδώ θεωρούμε τον περιορισμό της g στο $[a, x_0 - \delta]$)

$$U(g, P_1) - L(g, P_1) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Με την ίδια λογική βρίσκω διαμέριση P_2 του $[x_0 + \delta, b]$ με $U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\epsilon}{3}$ (εδώ θεωρούμε τον περιορισμό της g στο $[x_0 + \delta, b]$). Όμως αυτό σημαίνει πως για την διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ του $[a, b]$ θα είναι:

$$U(g, P) - L(g, P) = U(g, P_1) - L(g, P_1) + (M' - m') \cdot 2\delta + U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{4M\epsilon}{12M} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη. Στην παραπάνω σχέση $M' = \sup\{g(x) : x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta\}$ και $m' = \inf\{g(x) : x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta\}$ οπότε $M' - m' \leq |M'| + |m'| \leq 2M$.

¹ Αρχικά λύνοντας την άσκηση μπορώ να πάρω $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ αντί για $\epsilon/3, \epsilon/12M, \epsilon/3$. Στην πορεία θα έχω στην ανισότητα $U(g, P) - L(g, P) < \epsilon_1 + \epsilon_2 \cdot 4M + \epsilon_3$. Από αυτό καταλαβαίνω ότι πρέπει να πάρω αντίστοιχα $\epsilon/3, \epsilon/12M$ και $\epsilon/3$.



Παρατηρήστε ότι με τη χρήση της άσκησης 9 και του θεωρήματος 4.4.5 η άσκηση μπορεί να απλουστευθεί ως εξής: Η g είναι συνεχής στο $[a, c]$ για κάθε c με $a < c < x_0$. Άρα ολοκληρώσιμη. Άρα από την άσκηση 9 είναι ολοκληρώσιμη και στο $[a, x_0]$. (στην άσκ. 9 το $[0, 1]$ μπορεί να αντικατασταθεί με το $[a, b]$, ενώ η επιλογή του άκρου δεν παίζει ρόλο στην απόδειξη - το συμπέρασμα ισχύει και για $0 \leq b < 1$ με την f ολοκληρώσιμη στο $[0, b]$). Όμοια η g είναι ολοκληρώσιμη και στο $[x_0, b]$. Από το Θεώρημα 4.4.5 η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\square$

Παραλειπόμενα 1: Για να γίνει πιο κατανοητή η απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.2 (σελ. 65-66) θα δείξουμε ότι αν η f είναι φραγμένη και για κάθε ϵ υπάρχει μια διαμέριση P τέτοια ώστε

$$U(f, P) - \epsilon \leq I \leq L(f, P) + \epsilon,$$

τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα $\int_a^b f(x) dx = I$.

Λύση: Θα δείξουμε καταρχάς ότι

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq I.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\overline{\int_a^b f(x) dx} > I$. Θέτουμε $\epsilon' = (\overline{\int_a^b f(x) dx} - I) / 2$. Παρατηρήστε ότι $\epsilon' > 0$. Άρα υπάρχει διαμέριση $P_{\epsilon'}$ με

$$\begin{aligned} U(f, P_{\epsilon'}) - \epsilon' &\leq I \Rightarrow U(f, P_{\epsilon'}) \leq \epsilon' + I = \frac{\overline{\int_a^b f(x) dx}}{2} - \frac{I}{2} + I = \frac{\overline{\int_a^b f(x) dx}}{2} + \frac{I}{2} \\ &< \frac{\overline{\int_a^b f(x) dx}}{2} + \frac{\overline{\int_a^b f(x) dx}}{2} = \overline{\int_a^b f(x) dx} \end{aligned}$$

Αφού το $\overline{\int_a^b f(x) dx}$ είναι το infimum των πάνω αθροισμάτων, το παραπάνω είναι άτοπο ($a \in A$ και $a < \inf\{x : x \in A\}$). Άρα $\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq I$. Όμοια $\underline{\int_a^b f(x) dx} \geq I$.

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq I \leq \underline{\int_a^b f(x) dx} \quad (1)$$

δηλαδή

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq \underline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Επιπλέον (ισχύει πάντα) $\overline{\int_a^b f(x) dx} \geq \underline{\int_a^b f(x) dx}$. Άρα $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$ και η f είναι ολοκληρώσιμη. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Ερώτηση: Πού χρειαστήκαμε το ότι η f είναι φραγμένη; $\square$