



Άσκηση 14 σ. 76: Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση: Η συνεπαγωγή $f(x) = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = 0$ είναι προφανής (Θεώρημα 4.4.6 - $m = M = 0$). Έστω λοιπόν ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\exists x_0 \in [a, b]$ με $f(x_0) > 0$. Λόγω συνέχειας μπορώ να υποθέσω ότι $x_0 \neq a$ και $x_0 \neq b$. Για $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Έχω όμως

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \\ &\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + 0 \geq 2\delta \frac{f(x_0)}{2} = \delta \cdot f(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο ($0 > 0$) άρα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. □

Άσκηση 15, σ. 76: Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Λύση: Θα θεωρήσουμε την $h(x) = f(x) - g(x)$ και θα χρησιμοποιήσουμε την άσκηση 14. Παρατηρήστε ότι h συνεχής και $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = 0$. Αν ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε από την άσκηση 14 θα είναι $h(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ θεωρώ την $-h(x)$ και καταλήγω στο ίδιο συμπέρασμα. Τέλος αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $h(x_1) > 0$ και $h(x_2) < 0$ από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ με $h(x_0) = 0$, δηλαδή με $f(x_0) = g(x_0)$. □

Άσκηση 16, σ. 76: Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την άσκηση 14 (παρατηρήστε ότι το ζητούμενο είναι το ίδιο). Η f είναι συνεχής. Άρα μπορώ να πάρω $g(x) = f(x)$. Θα είναι

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

Όμως $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε από την άσκηση 14 $f^2(x) = 0$. Άρα θα είναι και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. □

Άσκηση 19, σ. 76: Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;



Λύση: Στην ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνω $g(x) = 1$. Θα είναι

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 &= \left(\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx\right) \cdot \left(\int_0^1 g^2(x) dx\right) \\ &= \left(\int_0^1 f^2(x) dx\right) \cdot \left(\int_0^1 1 dx\right) = \int_0^1 f^2(x) dx.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα βασίζεται στο ότι το ολοκλήρωμα της $g(x) = 1$ στο $[0, 1]$ ισούται με 1. Αν το διάστημα ολοκλήρωσης έχει μήκος μεγαλύτερο του 1, η ανισότητα δεν ισχύει υποχρεωτικά, πχ $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$. $\square$